Equacions diferencials per tot arreu

de com el càlcul infinitesimal resol problemes
en tots els camps del saber

Joan Quintana Compte

2018

INDEX

Sociologia
La ciència de l'enamorament 3
Matemàtiques
Equació de la corda pesant: la catenària 11

La ciència de l'enamorament

Sociologia

Existeix l'amor etern? El destí final de les parelles ha de ser sempre la pèrdua d'interès i l'apatia? O per contra, sota quines condicions es pot aconseguir una relació amorosa i estable a llarg termini. Aquest problema el va analitzar Steven Strogatz, de la universitat de Harvard, el 1988 [1].

Per analitzar l'evolució temporal de la relació sentimental entre dues persones, haurem de modelitzar el sistema. Suposem que tenim dues persones, el **Pere** i la **Maria**, que han començat una relació després d'un amor a primera vista (això sí que són unes bones condicions inicials per a aquest sistema). Però el Pere és una persona independent, i sempre es mostra dubtós amb les seves parelles, no li agrada el compromís. Com més pendent d'ell està la Maria, més sentiment de rebuig sent el Pere cap a ella. Per contra, la Maria és una noia dolça que li agrada sentir-se estimada. Com més atencions li fa el Pere, més ganes té de correspondre'l. Podem modelitzar aquests dos comportament amb un sistema d'equacions diferencials acoblades:

$$\frac{dp}{dt} = -am \tag{1}$$

$$\frac{dm}{dt} = bp \tag{2}$$

on *p(t)* i *m(t)* és el nivell d'amor/odi que senten el Pere i la Maria cap a la seva parella. Valors positius de p i m signifiquen amor, mentre que els valors negatius signifiquen rebuig i odi. Els paràmetres a i b són valors positius, i el signe negatiu que acompanya la a té a veure amb la el sentiment d'independència del Pere: com més l'estima la Maria, més rebuig experimenta cap a ella.

Per solucionar el sistema d'equacions, aïllem p de (2) i ho substituïm a (1):

$$\frac{d^2m}{dt^2} = -ab\ m \tag{3}$$

I aquesta equació diferencial de segon ordre és ben coneguda, és l'equació de la molla ($F = -Kx$, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$), que té per solució un moviment

harmònic simple. Fent un símil, podem pensar que la *força* de l'amor/odi és proporcional al sentiment d'amor/odi, però amb signe negatiu: com més estima la Maria, més impuls sent per canviar aquest sentiment.

Per tant, hem d'esperar que la solució del nostre problema sigui un oscil·lador de la forma:

$$m(t) = A\ sin(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

on ω és la velocitat angular:

$$w = \sqrt{ab} \tag{5}$$

amb període:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}} \tag{6}$$

Els valors de A i φ depenen de les condicions inicials. Suposem que per a t=0, els valors de m i p són $m_o = 0$ i p_o. $m_o = 0$ implica que $\varphi = 0$. La velocitat en l'instant inicial:

$$v_m(0) = A\omega\ cos(\omega t) = A\omega = b\ p_o \tag{7}$$

Per tant, el valor de l'amplitud de l'amor de la Maria:

$$A = \frac{b\ p_o}{\omega} = \sqrt{\frac{b}{a}}\ p_o \tag{8}$$

La solució per al Pere s'obté de calcuar (2) derivant sobre m:

$$p(t) = \frac{A\omega}{b}\ cos(\omega t + \varphi) = B\ cos(\omega t + \varphi) \tag{9}$$

Per a $\varphi = 0$:

$$p(t) = B\ cos(\omega t) \tag{10}$$

on

$$B = \frac{A\ \omega}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}\ A = p_o \tag{11}$$

Per tant, A i B no són independents, sinó que depenen de la relació $\frac{a}{b}$, doncs és un sistema acoblat. Veiem que l'amor absolut que senten la Maria i el Pere (valors de A i B) són diferents, i és que els conceptes d'amor i felicitat són relatius, no totes les persones tenen el mateix grau de satisfacció davant d'una relació.

En la figura (1) hem representat les dues solucions superposades (A=5, B=3), en el cas més senzill de $\varphi = 0$. Veiem com els períodes d'amor i odi es van succeïnt en el temps. Quan la Maria té un amor màxim pel Pere, el Pere se sent insegur i disminueix el seu amor cap a ella. La qual cosa provoca que ella també comenci a plantejar-se la relació. Però això finalment provocarà una relaxació en la relació que farà recuperar la confiança del Pere cap a la Maria que, sempre amb efectes retardats, farà incrementar l'amor de la Maria cap a la seva parella.

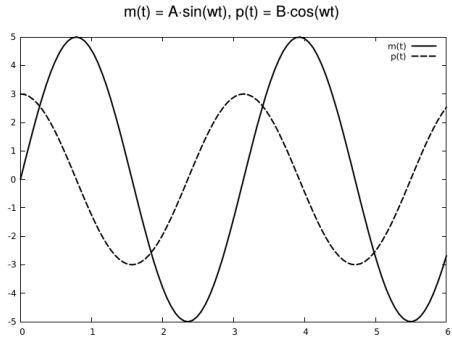

Figura 1: L'amor del Pere i la Maria mostren un comportament oscil·lant.

Espai de les fases

Podem fer l'anàlisi del problema en l'espai de les fases, figura (2), on no apareix la variable temporal, sinó només la relació que hi ha entre les dues variables p i m.

La identitat trigonomètrica ens diu que:

$$sin^2(\omega t + \varphi) + cos^2(\omega t + \varphi) = 1 \tag{12}$$

Aplicant-ho al nostre problema:

$$\frac{m^2}{A^2} + \frac{p^2}{B^2} = 1 \tag{13}$$

que és l'equació de l'el·lipsi. Podem aïllar *m(p)*:

$$m = \pm\frac{A}{B}\ \sqrt{B^2 - p^2} \tag{14}$$

Per als valors A=5, B=3 obtenim la següent equació representada en la figura (2):

$$m = \pm 1{,}66\ \sqrt{9 - p^2} \tag{15}$$

En el primer quadrant, quan el valor de p és màxim, m=0. Però el valor de m s'incrementa, doncs la Maria vol correspondre l'amor del Pere. A mida que puja el valor de m, el valor de p disminueix, i com més gran és m, més ràpida és la disminució, fins al punt que p=0, i entrem en el segon quadrant, que significa que el Pere comença a rebutjar la Maria. Com a resposta, la Maria comença a disminuir el seu amor, la qual cosa ralentitza el rebuig del Pere. En aquest moment, però, el rebuig del Pere és total (p=-3), i la Maria està desconcertada (m=0). Entrem en el tercer quadrant, i el Pere comença a mostrar-se compassiu i penedit, disminuint el nivell d'odi (encara estem en valors negatius de p). La Maria, emprenyada, comença a odiar el Pere al llarg del tercer quadrant. I en el quart quadrant el Pere està realment penedit en veure el nivell de rebuig que experimenta la Maria cap a ell, i comença a experimentar amor (valors positius de p), que fa que la Maria, sempre pendent dels sentiments del Pere, comenci a disminuir el seu odi al llarg del quart quadrant fins que arribem al punt de partida.

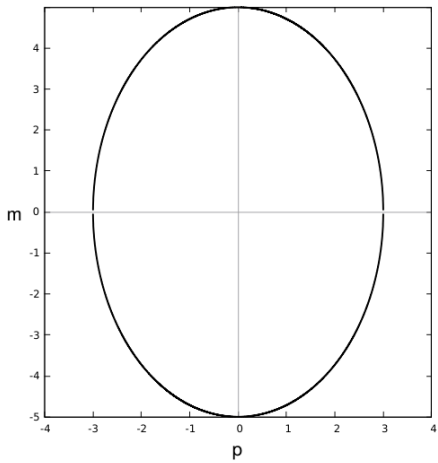

Figura 2: En l'espai de fases podem veure com evolucionen conjuntament els amors del Pere i la Maria.

La bona notícia és que almenys en una quarta part del temps els valors de p i m són positius, la qual cosa significa que la relació és feliç per a les dues parts.

Conservació de l'energia

Si sobre el sistema Pere-Maria no actuen altres influències (forces externes, que ja sabem que això és impossible...) el sistema és conservatiu, i l'energia total no varia amb el temps. Seguint amb el símil de la molla, l'energia total del sistema (energia mecànica) és la suma de l'energia cinètica ($Ec = \frac{1}{2} m\ v^2$ per a la molla) i l'energia potencial ($Ep = \frac{1}{2} K\ x^2$ per a la molla), que en el

nostre cas podem escriure:

$$E_T = E_{Tm} + E_{Tp} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} E_{Tm} = E_{cm} + E_{pm} &= \frac{1}{2}\ v_m^2 + \frac{1}{2}\ ab\ m^2 = \\ &= \frac{1}{2}\ A^2\ \omega^2\ cos^2(\omega t + \varphi)\ +\ \frac{1}{2}\ ab\ A^2\ sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}\ ab\ A^2\ (sin^2(\omega t + \varphi) + cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}\ ab\ A^2\ = \frac{1}{2}\ \omega^2\ A^2 \end{aligned} \tag{17}$$

De la mateixa manera:

$$E_{Tp} = \frac{1}{2}\ \omega^2\ B^2 \tag{18}$$

Veiem que l'energia associada a les dues persones és diferent, doncs l'amor/odi/felicitat són sentiments que es poden viure amb més o menys intensitat. Finalment, l'energia total del sistema és:

$$E_T = \frac{1}{2}\omega^2(A^2 + B^2) \tag{19}$$

Per tant, l'energia mecànica és constant i independent del temps. En el moviment oscil·lant de l'amor hi ha un traspàs constant entre l'energia potencial (la capacitat d'estimar/odiar), i l'energia cinètica (l'energia associada a la inèrcia en el canvi de l'estat amorós). Per exemple, quan $m = 0$ la Maria sent indiferència pel Pere (ni amor ni odi) en aquell moment concret, però en realitat la seva *psique* està experimentant unes forces molt potents que la portaran a estimar-lo molt (primer quadrant) o a odiar-lo molt (tercer quadrant), depenent de quin és l'amor del Pere cap a ella en aquell moment.

Model general

Un model més general i complex de la relació entre dues persones el podem representar amb aquest sistema d'equacions diferencials:

$$\frac{dp}{dt} = A_{11}p + A_{12}m \tag{20}$$

$$\frac{dm}{dt} = A_{21}p + A_{22}m \tag{21}$$

que podem representar amb una matriu de paràmetres:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Es pot fer un estudi detallat del comportament de la relació entre les dues persones [2][3] i podem trobar, segons els valors dels paràmetres (que poden ser positius o negatius), totes les combinacions possibles: amor etern amb comportament exponencial; odi etern; relació dispar (un sempre estima i l'altra sempre odia); o bé el que passa motles vegades, l'amor s'esmorteeix amb un comportament asimptòtic cap a $p{=}m{=}0$, ja sigui de forma oscil·lant o no.

Hem fet l'anàlisi de la relació entre dues persones. Com hauríem de modelar el sistema si introduíssim una tercera persona (triangle amorós)? La solució i l'anàlisi es complicarien molt, com passa en el problema clàssic dels 3-cossos [5] sotmesos a atracció gravitatòria, que és un problema molt més complexe que el problema clàssic dels 2-cossos [4].

Com a conclusió, poden les matemàtiques ajudar a trobar la nostra parella ideal? La resposta és tan complexa que sembla ser que aquesta vindrà de la mà de la Intel·ligència Artificial i els algoritmes de *Deep Learning* que ja intenten incorporar les *apps* i les agències de relacions de parella.

Per saber-ne més

[1] Steven H. Strogatz. *Love Affairs and Differential Equations*. Mathematics Magazine Vol 61, No 1, February 1988.
`http://ai.stanford.edu/ rajatr/articles/SS_love_dEq.pdf`

[2] Taylor Israel. *Romeo, Romeo, What Art Thou Differential Equations?*. Oklahoma Wesleyan University. 2010.
`http://sections.maa.org/okar/papers/2010/israel.pdf`

[3] The Love Affair of Romeo Juliet. A System of Differential Equations.
`http://www.math.ualberta.ca/~devries/crystal/ContinuousRJ/index.html`

[4] Two-body problem. From Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem

[5] Three-body problem. From Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem

Equació de la corda pesant: la catenària

Matemàtiques

En la figura (1) hem dibuixat un cable pesat de longitud L, amb els extrems a la mateixa altura h, massa M i densitat constant ϱ. La llum del cable (separació entre els extrems) és a. També es representa les forces que actuen sobre un tros de cable ds.

La corda està en equilibri, la qual cosa significa que el conjunt de forces que tenim sobre qualsevol tros ds és 0. En l'eix x els dos components de la tensió horitzontal es compensen; i en l'eix y el pes del tros de cable es compensa amb la diferència de les dues tensions verticals.

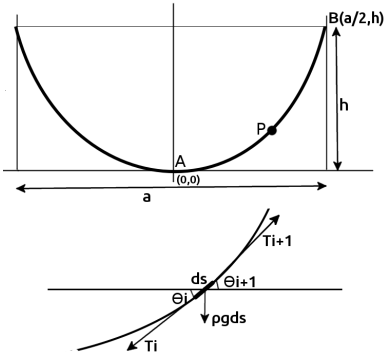

Figura 1: Geometria del problema.

$$T_i \; cos\theta_i \;\; = \;\; T_{i+1} \; cos\theta_{i+1} \tag{1}$$

$$T_{i+1} \; sin\theta_{i+1} - T_i \; sin\theta_i \;\; = \;\; \rho g \; ds \tag{2}$$

La condició d'equilibri és que en qualsevol punt P les components horitzontals de les tensions són iguals, i és igual a la tensió T_o que s'experimenta en el punt A, el punt mínim de la corba.

$$T_{x \;\; i} = T_{x \;\; i+1} = ... = T_o \tag{3}$$

Combinant (1, 2, 3):

$$T_o(tg\theta_{i+1} - tg\theta_i) = \;\; \rho g \; ds$$

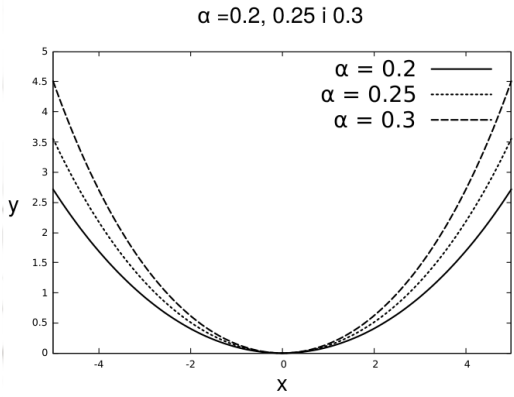

Figura 2: Catenàries amb valors diferents de alpha.

$$dtg\theta = \frac{\rho g \ ds}{T_o} \tag{4}$$

L'objectiu és trobar la solució de la corda pesant, y(x), i recordem que:

$$tg\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d \ tg\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_o}\frac{ds}{dx}$$

Com que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_o}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Definim la variable v:

$$v = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\rho g}{T_o}\sqrt{1+v^2} \tag{5}$$

Podem integrar v entre els punts A i P (en el mínim, el punt v=0):

$$\int_A^P \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int_0^x \frac{\rho g}{T_o}\ dx$$

És una integral immediata, la funció **argument sinus hiperbòlic**:

$$argsinh(v) = \frac{\rho g}{T_o}\ x$$

La seva inversa és el **sinus hiperbòlic**, i per tant ja podem aïllar la v:

$$v = sinh\Big(\frac{\rho g}{T_o}\ x\Big) = \frac{dy}{dx} \tag{6}$$

Tornem a integrar per trobar y(x), l'equació de la corba:

$$\int_0^y dy = \int_0^x sinh\Big(\frac{\rho g}{T_o}x\Big)\ dx$$

$$y = \frac{T_o}{\rho g}\Big(cosh\Big(\frac{\rho g}{T_o}x\Big) - 1\Big) \tag{7}$$

Definim el paràmetre :

$$\alpha = \frac{\rho g}{T_o} \tag{8}$$

i aquesta és la fórmula de la **catenària** (centrada a l'origen):

$$y = \frac{1}{\alpha}\ (cosh(\alpha x) - 1) \tag{9}$$

Podem obtenir la longitud de la catenària integrant tot el recorregut del cable:

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\frac{a}{2}} ds = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1+sinh^2(\alpha x)}\, dx = \\
&= 2\int_0^{\frac{a}{2}} cosh(\alpha x)\, dx = \frac{2}{\alpha}\, sinh\left(\frac{\alpha a}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

I l'altura de la catenària val:

$$
h = y(a/2) = \frac{1}{\alpha}\left(cosh\left(\frac{\alpha a}{2}\right) - 1\right) \tag{11}
$$

Aproximació a la paràbola

La corba és simètrica respecte l'eix y, i prop del punt més baix podem descomposar el cosh(x):

$$
cosh(x) = 1 + x^2 + O(x^4)
$$

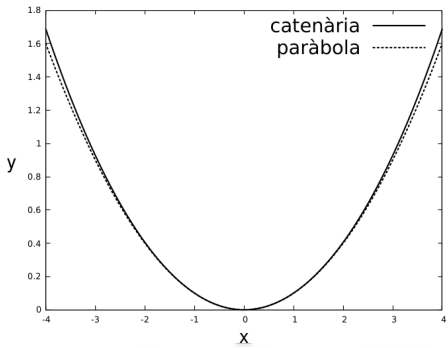

Figura 3: La catenària i la paràbola pràcticament coincideixen a l'origen.

i per tant la catenària s'assembla molt a la paràbola:

$$
y = \frac{1}{\alpha}\,(1 + \frac{(\alpha x)^2}{2} - 1) = \frac{\alpha x^2}{2}
$$

amb un petit error d'ordre 4, negligible al voltant de l'origen.
Podem veure la comparació entre la catenària i la paràbola a la Figura (3).

Cas pràctic: calcular la tensió de la corda en els extrems

Donat un cable de longitud L=40m i llum a=30m, volem saber la tensió que soportarà el cable en els extrems per tal d'escollir el material adequat.

$$L = \frac{2}{\alpha}\ sinh\left(\frac{\alpha a}{2}\right) \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{\rho g}{T_o} \tag{8}$$

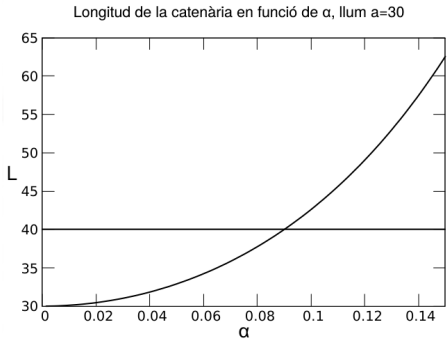

Figura 4: Solució gràfica de l'equació trascendent.

L'equació (10) és una equació trascendent i no en podem trobar la solució (valor de α que compleix la igualtat) de forma algebraica. Ho podem solucionar de forma gràfica o per mètodes numèrics. Ho farem de les dues maneres.

De la gràfica (4) podem deduir aproximadament el valor de $\alpha = 0{,}08$.

En el Llistat (1) tenim el codi Python per resoldre l'equació pel mètode de Brent. Partint de la solució aproximada, podem afinar més la solució: $\alpha = 0{,}09$.

Si coneixem la densitat del cable, per exemple 1Kg/m, podem deduir la tensió

del cable T_o:

$$T_o = \frac{\rho\, g}{\alpha} = 109N$$

Però T_o és el component horitzontal de la tensió. Per saber el valor absolut de la tensió hem de conèixer l'angle en l'extrem, en el punt B $(\frac{a}{2}, 0)$:

$$tg\theta_B = \frac{dy}{dx} = sinh\Big(\frac{\alpha a}{2}\Big)$$

que ens dóna una angle de 60,93º, i per tant la tensió total serà:

$$T = \frac{T_o}{cos\theta} = 224,28N$$

```
import numpy as np

def f(x):
    return (2/x)*(np.sinh(15*x)) - 40
from scipy.optimize import brentq
#sabem que la solució està entre 0.07 i 0.1
sol1 = brentq(f, 0.07, 0.1)

print sol1 #0.0900833066859
```

Llistat 1: Codi Python per trobar la solució numèrica

Aplicacions: arcs i la bicicleta de rodes quadrades

Figura 5: Casa Milà de Barcelona (Antoni Gaudí).

En les esglésies i catedrals europees es va utilitzar l'arc de mig punt (art romànic) i l'arc apuntat o ogival (art gòtic). En aquella època (s. X-XV) no s'aplicava encara les matemàtiques a l'arquitectura. El problema de la catenària (forma que adopta la corda pesant sotmesa només al seu propi pes) no es va plantejar fins al s.XVII, i va ser Christiaan Huygens el primer que va demostrar que la forma no era ben bé una paràbola. A resultes d'un desafiament plantejat per Jakob

Bernoulli, el 1691 Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens i Johann Bernoulli van obtenir l'equació de la catenària [6].

Però potser l'aplicació més *pràctica* de la catenària és el disseny d'una bicicleta de rodes quadrades que es mou en un camp de sotracs. Si aquests sotracs tenen forma i longitud adequades, es pot demostrar que la roda quadrada es pot moure de forma suau i horitzontal. Les condicions que hem d'imposar sobre la roda quadrada i la corba són:

- el centre del quadrat sempre està a una altura h del terra.
- la longitud del costat del quadrat és igual a la longitud L de la corba.
- en el punt de contacte del quadrat i la corba, les tangents del quadrat i la corba són iguals.

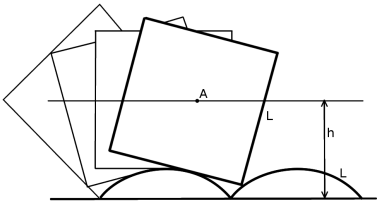

Figura 6: Roda quadrada sobre una catenària.

Sota aquestes condicions es pot demostrar [5] que la corba adequada és la catenària invertida. Podem ajuntar diferents catenàries, i precisament en el punt d'unió l'angle que formen les dues catenàries és de 90º.

Per saber-ne més

[1] Beléndez, A., Beléndez, T. Neipp C. *Estudio estático de un cable homogéneo bajo la acción de su propio peso: Catenaria.* Revista Española de Física 15(4) 2001, págs. 38-42.

[2] La curva catenaria
`http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm`

[3] Salvador Gil. *Parábolas y Catenarias.* Experimentos de Física, 2011. Universidad Nacional de Gral. San Martín. Buenos Aires, Argentina.

http://www.fisicarecreativa.com/taller/guias/Cap10_Catenarias.pdf

[4] Carlos Ivorra. *La catenaria*. Universitat de València.
https://www.uv.es/ivorra/Libros/Catenaria.pdf

[5] Juan B. Gil. *The catenary (almost) everywhere*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XII, No. 2 (2005) 251.
https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol12/juangil.pdf

[6] Catenaria
https://es.wikipedia.org/wiki/Catenaria