MDF: Mètode de les Diferències Finites

Mètodes numèrics per a resolució d'equacions diferencials

Introducció

El **Mètode de les diferències finites (MDF)** (*finite-difference methods, FDM*) són mètodes numèrics per resoldre equacions diferencials aproximant-les a equacions de diferències, on aquestes diferències finites s'aproximen a les derivades. Els mètodes MDF converteixen equacions diferencials ordinàries (ODE) en un sistema d'equacions, que es pot resoldre per tècniques d'àlgebra matricial. La reducció de l'equació diferencial a un sistema d'equacions algebraiques fa que el problema de trobar la solució sigui ideal per a la potència de càlcul dels ordinadors actuals. Per això els mètodes MDF són els que s'utilitzen àmpliament per trobar solucions numèriques a les euacions diferencials en derivades parcials.

A partir del **Teorema de Taylor** i la seva expansió en sèrie, donada una funció *f(x)* en el punt x=a, *f(a)* podem trobar el valor *f(a+h)* si coneixem les seves derivades en el punt x=a. Per un valor de h suficientment petit podem menysprear els termes d'ordre 2 i superiors, i obtenim la coneguda fórmula:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

De la mateixa manera podem escriure:

$$f''(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{2}$$

Deducció de la fórmula de recurrència

Anem a deduir la fórmula de recurrència a partir d'un exemple. Tenim la següent equació diferencial:

$$f''(x) = 3f(x) + 2 \tag{3}$$

Substituïm l'argument x per x-h:

$$f''(x-h) = 3f(x-h) + 2$$

i combinant amb (2) i després amb (1):

$$\frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = 3f(x-h) + 2$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=3f(x-h)h+2h$$

Aïllem *f(x+h)*, i veiem com depèn dels valors previs *f(x)* i *f(x-h)*:

$$f(x+h)=2f(x)+(3h^2-1)f(x-h)+2h^2 \tag{4}$$

Aquest és el mètode explícit per resoldre l'equació diferencial per mètodes numèrics, i ens dóna com a resultat una relació de recurrència per trobar els valors futurs a partir dels valors previs. Necessitem dos valors inicials, *f(0)* i *f(1)*, que els trobem a partir de les condicions inicials *f(0)* i *f'(0)*, de manera que:

$$f(1)=f(0)+f'(0)\ h$$

Exemple 2. Balística (model sense fricció)

Llencem un projectil a l'aire, en direcció vertical (només ens fixarem en l'eix y). Per ara no considerem forces de fricció i la única força a la que està sotmesa el projectil és la força de la gravetat. Per tant, en aquest cas senzill:

$$y''(t)=-g \tag{5}$$

i integrant i imposant les condicions inicials hem de ser capacços de trobar les equacions del moviment.

Substituïm l'argument t per *t-dt*, on *dt* significa *delta t*, un delta de temps infinitèssim (equivalent a h en l'exemple anterior):

$$y''(t-dt)=-g$$

Combinem amb (2) i després amb (1):

$$y'(t)-y'(t-dt)=-g\ dt$$

$$y(t+dt)-y(t)-(y(t)-y(t-dt))=-g\ dt^2$$

aïllem y(t+dt):

$$y(t+dt)=2y(t)-y(t-dt)-g\ dt^2 \tag{6}$$

I aquesta és la relació de recurrència per trobar el moviment del projectil a partir dels instants previs. Les condicions inicials són la posició i la velocitat en l'instant t=0: $y(t_0)$ i $v(t_0)$, i amb aquests dos valors puc conèixer la posició en l'instant *t1*:

$$y(t_1)=y(t_0)+y'(t_0)dt=y(t_0)+v(t_0)dt \tag{7}$$

I per tant, un cop ja conec $y(t_0)$ i $y(t_1)$, ja puc conèixer amb la relació de recurrència (6) tots els instants futurs.

Podem canviar la notació de (6) per adaptar-ho a una notació algorísmica per ser implementada amb ordinador:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} - g\ dt^2 \tag{8}$$

Exemple 3. Balística (model amb fricció proporcional a la velocitat)

De forma general, la fricció és una combinació de termes de pèrdua de pressió dinàmica proporcionals a v^2, i termes de fricció superficial proporcionals a v.

En un primer model un projectil està sotmès a una força de fregament que és proporcional a la velocitat. El coeficient de fregament α depèn de molts factors com per exemple la geometria del projectil.

$$y''(t) = -\alpha y'(t) - g \tag{9}$$

Integrant i imposant les condicions inicials hem de ser capaços de trobar les equacions del moviment.

Substituïm t per *t-dt*, i comencem a operar igual que hem fet en els exemples anteriors:

$$y''(t-dt) = -\alpha y'(t-dt) - g$$

$$\frac{y'(t) - y'(t-dt)}{dt} = -\alpha \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} - g$$

$$y(t+dt) - y(t) - (y(t) - y(t-dt)) = -\alpha dt(y(t+dt) - y(t)) - g\ dt^2$$

$$(1 + \alpha\ dt)y(t+dt) = (2 + \alpha\ dt)y(t) - y(t-dt) - g\ dt^2$$

i finalment:

$$y(t+dt) = \frac{1}{(1 + \alpha\ dt)} \left[(2 + \alpha\ dt)y(t) - y(t-dt) - g\ dt^2\right] \tag{10}$$

Les condicions inicials són la posició i la velocitat en l'instant t=0: $y(t_0)$ i $v(t_0)$, i amb aquests dos valors puc conèixer la posició en l'instant *t1*:

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)dt = y(t_0) + v(t_0)dt \tag{11}$$

Amb notació algorísmica la relació de recurrència ens queda:

$$y_{i+1} = \frac{1}{(1 + \alpha\ dt)} \left[(2 + \alpha\ dt)y_1 - y_{i-1} - g\ dt^2\right] \tag{12}$$

Exemple 4. Balística (model amb fricció proporcional al quadrat de la velocitat)

$$y''(t) = -\beta y'^2(t) - g \tag{13}$$

i operant algebraicament trobem que y_{i+1} depèn quadràticament dels valors anteriors y_i i y_{i-1}:

$$y_{i+1} = \frac{2\beta y_i - 1 \pm \sqrt{4\beta y_i - 4\beta y_{i-1} + 1 - 4\beta\ g\ dt^2}}{2\beta} \tag{14}$$

Bibliografia

[1] Finite difference method. From Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method

[2] External ballistics. From Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/External_ballistics